Απειροστικός Λογισμός Ι　　Μάθημα 7　　26/10/2015　　①

Ακολουθίες

Ορισμός: Ακολουθία (πραγματικών αριθμών) ονομάζεται οποιαδήποτε συνάρτηση $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Αντί για $a(1), a(2), \ldots, a(n)$ θα γράφαμε $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Το a_n λέγεται n-οστος όρος της ακολουθίας. Έτσι, $a_1 \to 1^{os}$ όρος
$a_2 \to 2^{os}$ όρος
κ.ο.κ.

Θα αναφερόμαστε ή θα συμβολίζουμε μια ακολουθία ως εξής:
Η ακολουθία (a_n) ή $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Παραδείγματα:

1) Αν $c \in \mathbb{R}$ και ορίσουμε $a_n = c \; \forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε τη σταθερή ακολουθία με τιμή c.

2) $a_n = n$　　$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \ldots$

3) $a_n = n^2$　　$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, \ldots$

4) $a_n = \sqrt{n}$　　$a_1 = 1, a_2 = \sqrt{2}, a_3 = \sqrt{3}, \ldots$

5) Αν $b \in \mathbb{R}$　$a_n = b^n$

6) Αναδρομικά οριζόμενες ακολουθίες:
Μας δίνεται το a_1 και ένας τύπος που δίνει το a_{n+1} συναρτήσει του a_n.

Π.χ. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \end{cases}$　　$a_1 = 3, a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{5}$
$a_3 = \sqrt{2+\sqrt{5}}, a_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{5}}}$ κ.ο.κ.

7) Μπορεί ο αναδρομικός τύπος να δίνει κάποιον όρο συναρτήσει των δύο προηγούμενων. Εδώ, απαιτείται να δοθούν οι $a_1, a_2, \ldots$

Π.χ. Ακολουθία Fibonacci

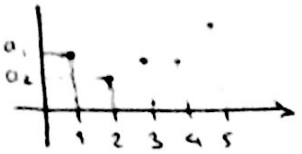
$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

8) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ άρτιος} \\ 2^n, & n \text{ περιττός} \end{cases}$　　$a_9 = 2^9, a_{10} = \frac{1}{10}, a_{11} = 2^{11}, a_{12} = \frac{1}{12}$

Γραφική Παράσταση της Ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Είναι το σχήμα στο $\mathbb{R}^2$ που περιλαμβάνει τα (n, a_n) με $n\in\mathbb{N}$. Αποτελείται από μεμονωμένα σημεία του επιπέδου με τετμημένες τους φυσικούς αριθμούς.



Δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ίσες (ταυτίζονται) αν $a_n=b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Πράξεις Μεταξύ Ακολουθιών

Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες, ορίζεται:

- Το άθροισμά τους $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Το γινόμενό τους $(a_n\cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Το πηλίκο τους $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (υπό την προϋπόθεση ότι $b_n\neq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$)

Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία και $k\in\mathbb{N}$ η ακολουθία $(a_{n+k-1})_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται τελικό τμήμα της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Είναι η ακολουθία $b_n=a_{n+k-1}$

<u>Π.χ.</u> αν $k=4$

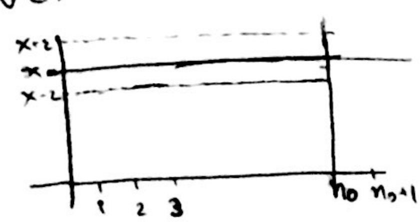
$b_1=a_4$
$b_2=a_5$
$b_3=a_6$
$b_4=a_7$

Σύνολο των όρων μιας ακολουθίας είναι το $\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$.

<u>Π.χ.</u> → Αν $a_n=(-1)^n$, το σύνολο των όρων είναι το $\{-1,1\}$.
→ Αν $a_n=\frac{1}{n}$, το σύνολο των όρων είναι το $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$.
→ Αν $b_n=(-1)^{n+1}$, το σύνολο των όρων είναι το $\{-1,1\}$.

Έτσι παρατηρούμε πως ενώ οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n=(-1)^n$ και $(b_n)=(-1)^{n+1}$ είναι διαφορετικές ακολουθίες, έχουν το ίδιο σύνολο όρων.

<u>Ορισμός:</u> Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x\in\mathbb{R}$. Λέμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x και συμβολίζουμε $a_n\to x$, αν $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})$ τέτοιο ώστε $(\forall n\geq n_0)$ να υπάρχει $|a_n-x|<\varepsilon \Leftrightarrow x-\varepsilon<a_n<x+\varepsilon$



Παραδείγματα

1) $\frac{1}{n} \to 0$

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. [Αναζητούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για $n \geq n_0$ $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$]. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$, με $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (υπάρχει τέτοιος λόγω Αρχιμήδειας Ιδιότητας). Για κάθε $n \geq n_0$ $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

Από τα υπογραμμισμένα, λόγω του ορισμού, η απόδειξη είναι πλήρης.

2) $\frac{7}{\sqrt{n}} \to 0$

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Αναζητούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για $n \geq n_0$ $\left|\frac{7}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{7}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{49}{\varepsilon^2}$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > \frac{49}{\varepsilon^2}$ (π.χ. $n_0 = \left[\frac{49}{\varepsilon^2}\right] + 1$) $\left|\frac{7}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{7}{\sqrt{n}} \leq \frac{7}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$.

Πρόταση: (Μοναδικότητα όρου ακολουθίας)

Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \to x$ και $a_n \to y$ τότε $x = y$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $x \neq y$. Θέλουμε $\varepsilon = \frac{|x-y|}{2}$

Εφόσον $a_n \to x$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - x| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_1$.

Εφόσον $a_n \to y$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - y| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_2$.

Θέτω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ $|x - y| = |(x - a_{n_0}) + (a_{n_0} - y)| \leq |x - a_{n_0}| + |a_{n_0} - y| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ $= |x-y|$ Άτοπο! Επομένως, $x = y$.

Ορισμός: Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ καλείται συγκλίνουσα αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \to x$. Το μοναδικό x για το οποίο συμβαίνει αυτό ονομάζεται όριο της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και συμβολίζεται $\lim a_n$ (ή $\lim\limits_{n} a_n$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$)

Εύκολα, με χρήση του ορισμού αποδεικνύουμε τα εξής:

(i) $a_n \to x \Leftrightarrow a_n - x \to 0 \Leftrightarrow |a_n - x| \to 0$

(ii) Άρα $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$

(iii) Αν $k \in \mathbb{N}$, $a_n \to x \Leftrightarrow a_{n+k} \to x$.

Ορισμός: Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται:

α) Άνω φραγμένη, αν υπάρχει $M\in\mathbb{R}$ ώστε $a_n\le M$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

β) Κάτω φραγμένη, αν υπάρχει $m\in\mathbb{R}$ ώστε $m\le a_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

γ) Φραγμένη, αν είναι άνω και κάτω φραγμένη

δ) Αύξουσα, αν $a_n\le a_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ε) Φθίνουσα, αν $a_{n+1}\le a_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Θεώρημα: (Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών)

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τρεις ακολουθίες με $a_n\le b_n\le \gamma_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$. και $x\in\mathbb{R}$ ώστε $a_n\to x$ και $\gamma_n\to x$. Τότε, $b_n\to x$.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον $a_n\to x$ $\exists n_1\in\mathbb{N}$ ώστε $|a_n-x|<\varepsilon$ $\forall n\ge n_1 \Leftrightarrow x-\varepsilon<a_n<x+\varepsilon$. Εφόσον $\gamma_n\to x$ $\exists n_2\in\mathbb{N}$ ώστε $|\gamma_n-x|<\varepsilon$ $\forall n\ge n_2 \Leftrightarrow x-\varepsilon<\gamma_n<x+\varepsilon$

Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. $\forall n\ge n_0$ $\quad x-\varepsilon\underset{\text{διότι } n\ge n_0\ge n_1}{<}a_n\le b_n\le\gamma_n\underset{\text{διότι } n\ge n_0\ge n_2}{<}x+\varepsilon \Longrightarrow |b_n-x|<\varepsilon$

Επομένως, $b_n\to x$.

Παρατήρηση:

Λόγω της παρατήρησης (iii) το προηγούμενο θεώρημα ισχύει με την ασθενέστερη υπόθεση ότι $a_n\le b_n\le\gamma_n$ $\forall n\ge k$ (όπου k οποιοσδήποτε φυσικός).

Πρόταση: (όρια και διάταξη)

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία και $x\in\mathbb{R}$ ώστε $a_n\to x$.

(i) Αν $M\in\mathbb{R}$ ώστε $a_n\le M$ $\forall n\in\mathbb{N}$ τότε $x\le M$.

(ii) Αν $m\in\mathbb{R}$ ώστε $m\le a_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ τότε $m\le x$.

Απόδειξη:

(i) Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $x>M$. Θέτουμε $\varepsilon=x-M>0$. Εφόσον $a_n\to x$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $|a_n-x|<\varepsilon$ $\forall n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow -\varepsilon<a_n-x<\varepsilon \Leftrightarrow$ $M-x<a_n-x<x-M$ $\forall n\ge n_0$. Έτσι $a_{n_0}>M$. Άτοπο! Άρα $x\le M$.

Ομοίως και για το (ii). Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $x<m$. Θέτουμε $\varepsilon=m-x>0$.

Πρόταση: Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία και $x\in\mathbb{R}$ με $a_n\to x$.

(i) Αν $x>0$ τότε $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $a_n>\frac{x}{2}$ $\forall n\ge n_0$

(ii) Αν $x<0$ τότε $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $a_n<\frac{x}{2}$ $\forall n\ge n_0$

(iii) Αν $x\ne 0$ τότε $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $|a_n|>\frac{|x|}{2}$ $\forall n\ge n_0$

Απόδειξη:

ii) Για $\varepsilon=-\frac{x}{2}>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για $n\ge n_0$ να ισχύει $a_n<\frac{x}{2}$.

$|a_n-x|<-\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}<a_n-x<-\frac{x}{2} \Rightarrow x+\frac{x}{2}<a_n<x-\frac{x}{2}$

(i) για $\varepsilon = \frac{x}{2} > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $|a_n - x| < \varepsilon = \frac{x}{2}$

$\Rightarrow -\frac{x}{2} < a_n - x < \frac{x}{2} \Rightarrow x - \frac{x}{2} < a_n < x + \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} < a_n$.

Πρόταση: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Απόδειξη:

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n \to x$

Για $\varepsilon = 1$ από τον ορισμό προκύπτει ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - x| < 1$ $\forall n \geq n_0$

Έτσι, $\forall n \geq n_0$ $|a_n| \leq |a_n - x| + |x| < 1 + |x|$

Θέτουμε $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, 1+|x|\}$ τότε $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Άρα, η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη

Πρόταση: Αν $a_n \to 0$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη, τότε $a_n b_n \to 0$

Απόδειξη:

Εφόσον (b_n) φραγμένη $\exists M > 0$ ώστε $|b_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Έστω $\varepsilon > 0$, εφόσον $a_n \to 0$ προκύπτει ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$ $\forall n \geq n_0$

$\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ $|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| \leq M|a_n| < \frac{M\varepsilon}{M} = \varepsilon$

Για αυτό βάζω $\frac{\varepsilon}{M}$ για να έχω στο τέλος ε

Επομένως, $a_n b_n \to 0$.

Πρόταση: Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες και $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \to a$ και $b_n \to b$. Τότε:

(i) $a_n + b_n \to a + b$

(ii) $a_n b_n \to ab$

(iii) Αν $b_n \neq 0$ $\forall n$ και $b \neq 0$ $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$

(iv) Αν $b_n \neq 0$ $\forall n$ και $b \neq 0$ $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

Απόδειξη:

(i) Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $a_n \to a$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_1$

Εφόσον $b_n \to b$ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_2$

Θέτω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Τότε $\forall n \geq n_0$ $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Άρα, $a_n + b_n \to a + b$.

(ii) $a_n b_n \to ab$

$0 \leq |a_n b_n - ab| = |a_n b_n + a_n b - a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| =$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{|a_n|}_{\text{φραγμένη}} \cdot |b_n - b|^{\to 0}}_{\text{συγκλίνει στο } 0} + \underbrace{|b| \, |a_n - a|^{\to 0}}_{\text{συγκλίνει στο } 0}}_{\text{συγκλίνει στο } 0} = 0$$

Από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών

$a_n b_n - ab \to 0 \Rightarrow a_n b_n \to ab$.